دوراهی تارزان!

مسئله‌ای چالش‌برانگیز برای شاگردان فیزیک پایه

ماتیو رو و مارکوس سیرز
ترجمهٔ مرجان روح‌نواز

اشاره

هدف از طرح این مسئله که بسیار ساده به‌نظر می‌رسد اما حل آن چالش برانگیز است، آموزش شیوه‌های تفکر و استدلال در فیزیک نظری است.

کلیدواژه‌ها: زاویهٔ پرتاب، مسافت افقی، پایستگی انرژی

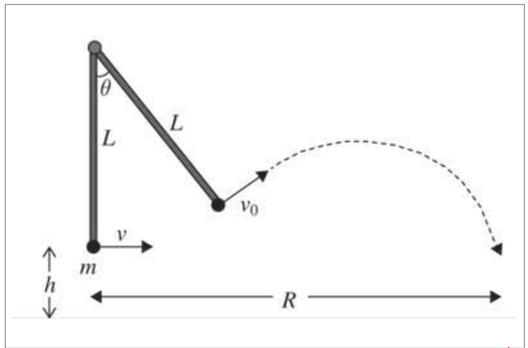
مسئله: فرض کنید تارزان می‌خواهد با استفاده از شاخهٔ درختی که آویزان است از روی یک برکه آب بپرد. برای عبور از برکه هنگام تاب خوردن آرام در کدام نقطه باید از شاخه جدا شود (شکل ۱)

این مسئله را دو راهی نامیده‌ایم چراکه دو عامل مهم در آن نقش دارند. از یک سو هر چه تارزان زودتر شاخه را رها کند، سرعت بیشتری خواهد داشت. از سوی دیگر هر چه دیرتر آن را رها کند، مسافت بیشتری را روی برکه طی خواهد کرد و پس از رها کردن شاخه زاویهٔ پرتاب اولیهٔ بیشتری خواهد داشت. بنابراین پرسش ما این است که در چه زاویه‌ای تارزان باید شاخه را رها کند تا مسافت افقی پرش وی بیشینه شود؟

در عمل این از مسئله‌هایی است که داشتن درک فیزیکی خوب از مسئله کمتر به کار شاگردان می‌آید و بهتر است خودمان با پرش از روی یک استخر (با استفاده از طناب) آن را تجربه کنیم. نخستین حدس شاگردان البته زاویهٔ 45° خواهد بود، چراکه این زاویه، مربوط به بیشینه مسافت افقی (برد) یک پرتابه در سطح افق است.

فرض می‌کنیم شاخه درخت بدون جرم و کاملاً صاف و محکم است. طول شاخه L و انتهای آن نخست در ارتفاع h بالای زمین قرار داشته باشد. همچنین فرض می‌کنیم تارزان جرم نقطه‌ای (m) باشد که از انتهای شاخه آویزان شده است (تا بتوان مرکز جرم او را هم‌تراز با نقطهٔ انتهایی شاخهٔ فرض کرد). سرعت اولیهٔ افقی v است و می‌خواهیم مسافت افقی تا رسیدن به سطح زمین بیشینه باشد (:برد). در ضمن این مساحت را از نقطهٔ شروع پرتاب محاسبه می‌کنیم نه از نقطهٔ رها کردن شاخه. پهنای برکه نقشی در محاسبه‌های ما ندارد مگر اینکه بخواهیم بدانیم که آیا تارزان به داخل برکه سقوط خواهد کرد یا نه؟ اصطکاک و مقاومت هوا را هم نادیده می‌گیریم.

بهتر است شاگردان مسئله را ساده شده در نظر بگیرند و سپس کم‌کم پیچیدگی‌های فیزیکی را به آن اضافه کنند. برای همین نخست برد پرتابه‌ای واقع بر سطح افق را در نظر می‌گیریم. برای پرتابه‌ای با سرعت اولیهٔ v_0 و زاویه پرتاب θ بالای سطح افق بیشتر کتاب‌های درسی مقدار برد (دامنهٔ بیشینه افقی) زیر را به دست می‌دهند.



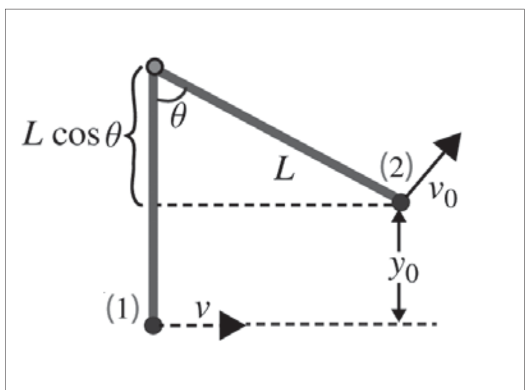
▲شکل ۱. دوراهی تارزان

$$R = \frac{v_\circ^{2}\sin 2\theta}{g} \qquad (1)$$

مقدار $g = +9/8\,m/s^2$ فرض می‌شـــود (فصل ٤ فیزیک سروی)

معادله (۱) می‌تواند پایه و اســـاس یافتن حل نهایی مسئله باشد.

در گام بعد دامنهٔ یک پرتابه (با سرعت اولیه v_0 و زاویه پرتاب θ) را در نظر می‌گیریم که از لبهٔ صخره‌ای به ارتفاع H از سطح زمین پرتاب شده است. این مسئله یک مسئله دو بعدی سینماتیک اســت و براســاس معادلـــهٔ $\Delta y = v_{i,y}\Delta t + \frac{1}{2}a_y\Delta t^2$ خواهیم داشت.



▲شکل ۲. استفاده از قانون پایستگی انرژی در حل مسئله. نقطهٔ ۱، نقطهٔ شروع حرکت و نقطهٔ ۲ نقطه‌ای است که در آن تارزان شاخه را رها می‌کند.

$$\frac{1}{2}g\Delta t^2 - (v_\circ \sin\theta)\Delta t - H = 0 \qquad (2)$$

که یک معادلهٔ درجه ۲ برحسب Δt است.
پاسخ این معادله عبارت است از

$$\Delta t = \frac{v_\circ \sin\theta + \sqrt{(v_\circ \sin\theta)^2 + 2gH}}{g} \qquad (3)$$

(تنها پاسخ مثبت رادیکال انتخاب شده است) و بنابراین دامنه افقی این پرتابه برابر است با :

$$R = v_{\circ,x}\Delta t$$
$$= v_\circ \cos\theta\left(\frac{v_\circ \sin\theta + \sqrt{(v_\circ \sin\theta)^2 + 2gH}}{g}\right) \qquad (4)$$

می‌توان تحقیق کرد کـــه در حد $H \to 0$ (یعنی اگر نقطهٔ فرود پرتابه هم‌تراز با سطح افقی پرتاب باشد.) معادله ٤ تبدیل به معادله ۱ می‌شود.

زاویـــهٔ بهینه برای برد (که با قرار دادن $\frac{dR}{d\theta} = 0$ به دســـت می‌آیـــد) بـــا افزایش ارتفـــاع H کاهش می‌یابـــد. یعنی برای صخره‌هایی بســـیار مرتفع برای طی کردن بیشترین مسافت باید جسم را افقی پرتاب کرد. برای حل مسئله در این مرحله، برنامه‌های رایانه‌ای ریاضی مانـــند Mathematica یا Maple می‌توانند پیچیدگی‌های معادله (٤) و بررسی شرایط حدی آن را برای شاگردان به خوبی به تصویر بکشند. با این حال حتی با استفاده از برنامهٔ ساده‌ای همانند Excel نیز می‌توان نمودارهای مفیدی را رسم کرد

پاسخ نهایی دو راهی تارزان

حال مســـتقیم به حل مسئله می‌پردازیم. از آنجا که سرعت تارزان هنگام رها کردن شـــاخه (v_0) را نمی‌دانیم، بنابراین از قانون پایســـتگی انرژی مکانیکی در دو نقطهٔ نشان داده شده در شکل (۲) اســـتفاده می‌کنیم. نقطهٔ ۱: نقطه‌ای که شاخه مســـتقیم به پایین آویزان است (و تارزان در این نقطه شاخه را می‌گیرد) و نقطهٔ ۲: نقطه‌ای که شـــاخه تا زاویه θ بالا رفته است (نقطه‌ای که تارزان شاخه را رها می‌کند).

انرژی پتانســـیل دستگاه را در نقطهٔ ۱ صفر فرض می‌کنیم (در این حالت E_1 فقط شامل انرژی جنبشی است). با مساوی قرار دادن E_1 و E_2 داریم:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy_\circ + \frac{1}{2}mv_\circ^2 \qquad (5)$$

از آنجا که $y_\circ = L - L\cos\theta$ خواهیم داشت:

$$v_\circ = \sqrt{v^2 - 2gy_\circ} = \sqrt{v^2 - 2gl + 2gl\cos\theta} \qquad (6)$$

دقـــت کنید که ســـرعت اولیه‌ای که برای تـــارزان در نظر می‌گیریـــم به او امکان می‌دهد که به هر زاویه‌ای از ۰ تا ۹۰° برسد (درباره این مسئله بعداً بحث خواهیم کرد).

برد حرکت تارزان از نقطهٔ رها شـــدن او (R_2) با قرار دادن معادلـــه (٦) در معادلهٔ (٤) به دســـت می‌آید. پاسـخ یعنی بـــرد R_1 (که از نقطهٔ ۱ اندازه گرفته می‌شـــود) برابر اســـت $R_2 = L\sin\theta$ و پاسخ نهایی برابر است با:

$$R_1 = L\sin\theta \cdot \sqrt{v^2 - 2gl + 2gl\cos\theta\cos\theta} \qquad (۷)$$

که در آن $H = h + y_0 = h + L - L\cos\theta$ با دادن مقادیر معقولـی از h،v و L می‌تـوان این برد را همانند شـکل ۳ برحسب زاویهٔ θ روی یک نمودار نشان داد و بنابراین به راحتی برآورد کرد که در کدام زاویه بیشـینه مسافت (برد) به دست می‌آید. برای حل دقیق‌تر می‌توان از $\frac{dr_1}{d\theta} = 0$ اسـتفاده کرد و مسئله را برای متغیر θ حل کرد. گرچه برای حل مسئله به این روش شاید نیاز به استفاده از روش‌های محاسبات عددی باشـد چند مورد حدی، به‌ویژه جالـب توجه‌اند. هنگامی که تارزان به سرعت می‌دود. (فرض کنیم که حد نهایی سرعت، بی‌نهایت شـود) می‌توان نشـان داد که زاویـه دلخواه برای بیشـینه کردن R_1، 45° اسـت (یعنی همان زاویهٔ به‌دست آمده برای پرتابه روی سطح افق). در واقع هنگامی که v بسیار بزرگ باشد سـرعت تارزان هنگام تاب خوردن اندکی تغییر می‌کند، بنابراین در این حالت تاب خوردن روی شاخه نقش مهمی در تعیین برد ندارد. اما هنگامی که v کوچک اسـت اتفاق عجیبی رخ می‌دهد: در نمودار R_1 برحسـب θ شکاف و گاف‌هایی بـه وجود می‌آید. پس از راهنمایی‌های بسـیار شـاگرد سرانجام متوجه می‌شود که به ازای یک مقدار انرژی جنبشـی کمینه تارزان به ارتفاع مشخص می‌رسد. درنتیجه مقادیر گوناگون سرعت اولیه v_0 برای مقدار زاویه θ که از نظر فیزیکی امکان‌پذیر است، محدودیت ایجاد می‌کند. شکل‌های نمودار مربوط به مقادیری از v هستند که در آن‌ها عبارت زیر رادیکال منفی است. سرعت کمینه‌ای که نیاز است تا به زاویه خاصی مانند θ رسید برابر است با :

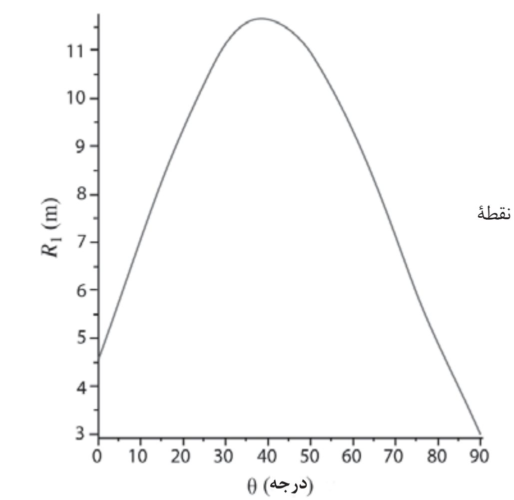
$$v_{min} = \sqrt{2gy_0} = \sqrt{2g(L - L\cos\theta)}$$

به دسـت آوردن رابطهٔ بالا با اسـتفاده از قانون پایستگی انرژی بسـیار ساده اسـت. به‌عنوان مثال عددی برای مقدار $L=3m$ سـرعت کمینه‌ای که می‌توان به هر زاویه‌ای تا زاویهٔ 90° رسید برابر است با $7/67 m/s$. هنگامی که از مقادیری کمتـر از این مقدار آسـتانه برای v اسـتفاده کنیم، نمودار R_1 بـرای زاویـهٔ بحرانی خاص $\theta c = \cos^{-1}[1 - v^2 2/2gl]$ معنای فیزیکی خود را از دسـت می‌دهد. برای سـرعت‌های بیشتر از v_{min}، معادله θ_c پاسخی ندارد. بنابراین هیچ نقطهٔ رها شـدنی نیز وجود ندارد که به معنای آن اسـت که تمام زاویه‌ها قابل‌قبول هستند.

بررسی تغییرات طول شاخه (L) نیز جالب توجه است. برای L هـای کوچک معادله (۷) به معادله (٤) تبدیل می‌شـود. یعنی شاخه در تعیین برد نقشی ندارد(و البته این دقیقاً همان چیزی است که انتظار می‌رود) برای مقادیر بزرگ L نیز زاویه رهاشـدنی وجود دارد که برای مقادیر بیشـتر از آن مسئله پاسخی ندارد، زیرا دوباره عبارت زیر رادیکال منفی می‌شود. در این مورد سـرعت تارزان برای رسیدن به این زاویه رهایی کافی نخواهـد بود، به این معنا که انرژی جنبشـی اولیه‌ای قیدی بر انرژی پتانسیل گرانشی که هنگام رها کردن شاخه دارد، قرار می‌دهد.

در پایـان توجه به این نکته لازم اسـت که زاویه بهینه رها شدن با زیاد شدن ارتفاع h کاهش می‌یابد.

با رسـیدن h به بی‌نهایت، زاویه رها شدن به صفر می‌رسد. این مسـئله محدودیت‌هـای معادله (٤) را به خوبی نشـان می‌دهد. در واقع می‌توان گفت هر چه بلند قدتر باشـید، باید زودتر شاخه را رها کنید.



▲ شکل ۳. دامنه افقی از نقطهٔ اولیهٔ گرفتن شاخه بر حسب زاویه رها شدن. برای مقادیر $L = 3m$, $h = 1m$, $v = 10 m/s$ دامنهٔ بیشینه در $\theta = 39/4^\circ$ رخ می‌دهد.

ساده‌سازی مسئله‌ها در فیزیک گاهی به قدری اغراق‌آمیز انجام می‌شود که باعث ساخت شوخی‌های علمی می‌شود

زنگ خنده

ساده‌سـازی مسـئله‌ها در فیزیک گاهی به قدری اغراق‌آمیز انجام می‌شود که باعث ساخت شوخی‌های علمی نظیر لطیفهٔ زیر می‌شود:

یک ریاضی‌دان، یک مهندس و یک فیزیک‌دان بر سـر اینکه چگونه می‌توان حجم یک گاو را اندازه گرفت با یکدیگر بحث و گفت‌وگو می‌کردند. ریاضی‌دان پیشنهاد کرد که با در نظر گرفتن تقارن‌های جسـم گاو و کاربرد قوانین هندسه این کار را انجام دهنـد، اما ایدهٔ او به این دلیل که انجام آن زمان زیادی می‌برد، رد شـد. مهندس پیشنهاد کرد که گاو را در استخری پر از آب فرو برند و سپس اختلاف ارتفاع آب بالا آمده را اندازه بگیرند،ایدهٔ وی نیز به‌دلیل عملی نبودن رد شد. در اینجا بود که فیزیک‌دان متفکرانه گفت: مسئله خیلی ساده است. کافی است فرض کنیم که گاو یک کره کوچک است، حجم آن را محاسبه می‌کنیم و سپس آن را تا اندازهٔ واقعی‌اش باد می‌کنیم!

منبع
The physics teacher• vol.51,November 2013